Université Paul Sabatier
Licence STS – Parcours PC
Physique – L1

Thème 7 – Mouvement circulaire
2009–2010, durée : 3 h

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras

A – Question de cours

I. Pendule simple

1) Définition, équations vectorielles du mouvement ;
2) Étude des petites oscillations en coordonnées polaires.

II. Repère cylindrique

Rappeler la définition de la base du repère cylindrique. Quelles sont les expressions de la vitesse et de l'accélération d'une particule par rapport à un référentiel dans cette base ? À quoi se réduisent ces expressions dans les deux cas suivants :
1) mouvements circulaires, uniformes ;
2) mouvements circulaires, non uniformes.

III. Mouvement circulaire d'un satellite terrestre

1) Étude dans un repère cartésien : force appliquée, accélération, vitesse, position, vitesse angulaire, période du mouvement ;
2) Représentation et propriétés des vecteurs position, vitesse et accélération dans le plan complexe ;
3) Cas particulier du satellite géostationnaire : définition, nature du mouvement, altitude, période de révolution.

B – Problèmes

I. Mouvement d'un pendule circulaire *(à faire à la maison, avec l'aide du cours)*

Un pendule circulaire est le système oscillant simple qui peut être représenté soit par un point matériel (de masse m) qui se déplace sans frottement sur un guide circulaire vertical soit par une masselotte A (de masse m) accrochée à l'extrémité d'un fil tendu de longueur ℓ (Figure 1). Dans cet exercice, on considère ce dernier cas et on étudie le mouvement de A dans un repère cartésien fixe (O, x, y, z) du référentiel du laboratoire supposé galiléen.
1) Faire le bilan des forces mises en jeu ;
2) Exprimer de façon vectorielle la deuxième loi de Newton ;
3) Définir les coordonnées polaires et le repère polaire associé ;
4) En projetant l'équation précédente dans la base du repère polaire, établir les deux équations différentielles auxquelles doivent satisfaire la vitesse v et φ ;

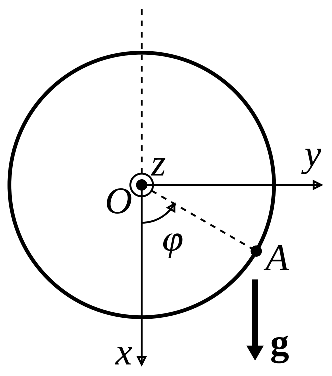

FIG. 1 – *Schéma d'un pendule simple*

5) En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre ne faisant intervenir que φ ;
6) Cas des petites oscillations : que signifie cette expression ? Calculer la période propre T_0 pour un fil de longueur $\ell = 0{,}5$ m. On prendra $g = 9{,}81$ m.s^{-2}. Donner la forme générale de la solution $\varphi(t)$.

II. Mouvement d'un avion en virage

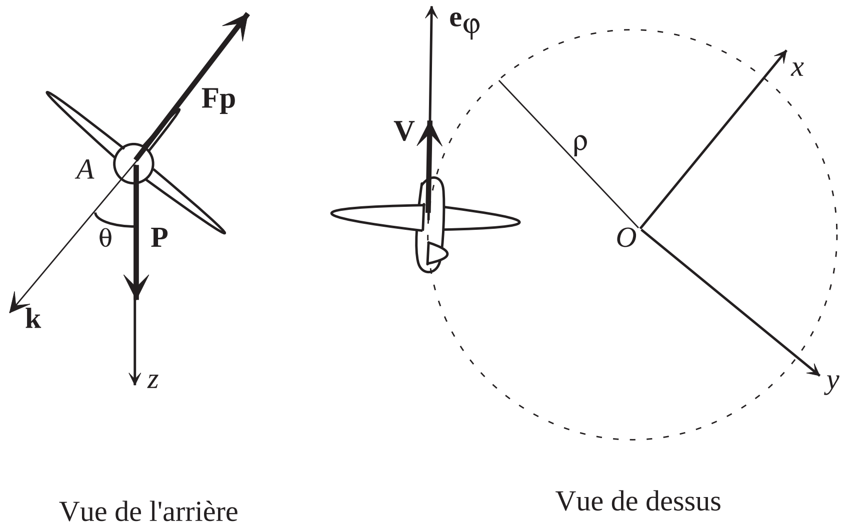

FIG. 2 – *Schéma d'un avion en virage à droite*

On considère un avion en virage vers la droite (Figure 2). Le repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ lié à la terre sera supposé galiléen. L'axe Oz est orienté suivant la verticale, vers le bas. L'axe Ox est vers le Nord et l'axe Oy vers l'Est. On note θ l'angle entre l'horizontale et les ailes de l'avion (inclinaison). L'avion est symétrique par rapport à un plan repéré par deux vecteurs unitaires $\mathbf{e}_\varphi$ et $\mathbf{k}$. Le vecteur $\mathbf{e}_\varphi$ est dirigé vers l'avant et $\mathbf{k}$ est dirigé vers le bas. Ainsi, quand l'avion n'est pas incliné, $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{e_z}$. Quand il est incliné, l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{e_z}$ est l'angle θ.
On considérera que la résultante des forces appliquées par l'air à l'avion est une force de portance $\mathbf{F_P}$, parallèle à $\mathbf{k}$, mais dirigée vers le haut, et dont la norme ne dépend que de la norme de la vitesse V de l'avion.
1) Faire le bilan des forces ;

2) L'avion est en mouvement circulaire à vitesse V constante. En déduire le vecteur accélération $\mathbf{a}$ de l'avion (on donnera ses coordonnées dans la base polaire) ;
3) En projetant la deuxième loi de Newton sur $\mathbf{e}_\varphi$ et $\mathbf{e_z}$, trouver une relation entre l'angle θ, la vitesse de l'avion V, le rayon du cercle R, et l'accélération de la pesanteur g ;
4) Quelle est alors la valeur de la force de portance F_P ?
5) Application numérique : avant de s'engager dans une vallée en montagne de largeur 500 m, le pilote d'un avion volant à 220 km/h souhaite déterminer si l'avion pourra y faire demi-tour. Il sait que pour des raisons techniques de résistance des structures de l'avion, la valeur de la force de portance ne doit pas dépasser deux fois le poids de l'avion. Le demi-tour sera-t-il possible ?

III. Trajectoire d'un satellite géostationnaire

On considère le mouvement d'un satellite géostationnaire S de masse m, autour de la terre supposée sphérique de masse M, de rayon R, sur une orbite circulaire de rayon $\rho = R + z$, où z (z=cste) est l'altitude du satellite par rapport à la surface de la terre. On appelle $G_0 = \mathcal{G}M/R^2$ le champ de gravitation au niveau du sol où $\mathcal{G}$ représente la constante de gravitation.
On définit un repère orthonormé direct $(O_T, \mathbf{e_x}, \mathbf{e_y}, \mathbf{e_z})$ du référentiel $\mathcal{R}$ lié à la terre, supposé galiléen (O_T est le centre de la terre), et le repère cylindrique lié à S, dont les axes sont donnés par la base locale $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$.
1) Que représente G_0 ? Le lier à la notion de poids ;
2) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{O_TS}$ dans la base locale ;
3) En déduire la vitesse du satellite et son accélération par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, en fonction de ρ, φ et de leurs dérivées ;
4) Exprimer la force agissant sur S dans la base locale ;
5) Écrire la deuxième loi de Newton et projeter l'égalité vectorielle obtenue suivant les directions définies par $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$. En déduire les deux équations en fonction de la variable φ et de ses dérivées ;
6) En déduire la vitesse du satellite par rapport à $\mathcal{R}$ en fonction de m, R, z et G_0 ;
7) Calculer la période de révolution T du satellite autour de la terre ;
8) Trouver l'altitude z_0, pour que le satellite tournant sur une trajectoire circulaire dans le plan de l'équateur terrestre, reste toujours à la verticale du même point de la terre (on supposera que la terre tourne d'un tour en 24 h, soit 86400 s, et on notera T_0 la période de révolution correspondante) ;
9) Applications numériques :
   a) on donne $G_0 = 10$ m.s^{-2}, $R = 6400$ km, $z = 2000$ km et $m = 120$ kg. Calculer numériquement la vitesse du satellite et la période T ;
   b) On impose au satellite d'être géostationnaire. Calculer l'altitude z_0. La vitesse du satellite est-elle plus grande ou plus petite que dans le cas a) ? Cela vous paraît-il normal ?